ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, модуль 2

Задачи для подготовки к рубежному контролю

«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Теоретические вопросы

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка.
2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка.
3) Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка.
4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.
5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.
6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ.
7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.
2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.
3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n-го порядка.
4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка.
5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка.
6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.
7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ.
8) Вывести формулу Остроградского - Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка.
9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.
10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.

Задачи для подготовки

1. Составление ОДУ (*1 балл*)

1.1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 + 3i$, $\lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения.

1.2. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальная система решений которого состоит из функций $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. При каких x для этого уравнения выполнено условие существования и единственности решения?

1.3. Могут ли функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.

1.4. Могут ли функции $y_1 = e^x \sin 2x$ и $y_2 = e^x \cos 2x$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.

1.5. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = Ce^x + \sin x$.

1.6. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C \cos x + 1$.

2. Задача Коши для ОДУ высших порядков (*4 балла*)

2.1. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$.

2.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.

3. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами (*4 балла*)

3.1. Найти общее решение ОДУ $\quad y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$.

3.2. Найти общее решение ОДУ $\quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

4. Составление общего решения линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (*3 балла*)

4.1. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x.$$

4.2. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x.$$

4.3. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y''' - 8y = 1 + x - 3e^{2x} + xe^{-x}\sin 3x - e^{-x}\cos\sqrt{3}x.$$

Образцы билетов рубежного контроля (теория)

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами. *(1 балл)*

2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций. *(3 балла)*

min = 2, max = 4

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ. *(1 балл)*

2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ. *(3 балла)*

min = 2, max = 4

Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 + 3i$, $\lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения. *(1 балл)*

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$. *(4 балла)*

3. Найти общее решение ОДУ $\quad y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$. *(4 балла)*

4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x\sin x - e^{x}\sin x.$$ *(3 балла)*

min = 8, max = 12

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C\cos x + 1$. *(1 балл)*

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$. *(4 балла)*

3. Найти общее решение ОДУ $\quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$. *(4 балла)*

4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^{V} - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^{x} - e^{-2x}\cos 3x.$$ *(3 балла)*

min = 8, max = 12
